

由信号二进小波变换极值重构 信号的样条插值算法

马社祥,刘贵忠,曾召华

(西安交通大学信息与通信工程研究所,西安 710049)

摘要: 本文通过二进小波变换极值或零交叉点可获取信号的多尺度边缘,由此得到信号的绝大部分信息.本文提出了用样条插值重构算法来实现由信号二进小波变换极值点重构原始信号.数值仿真实验显示了该算法的高效性和令人满意的重构效果.与已有的算法相比,该算法原理更简单、更直接,实现更方便,速度更快.

关键词: 信号重构;二进小波变换;极值表示;样条插值

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 01-0068-03

A Reconstruction Algorithm from Signals Dyadic Wavelet Transform Extrema

MA She-xiang, LIU Gui-zhong, ZENG Zhao-hua

(Institute of Information & Communication Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Multiscale edges of a signal can be detected by using extrema or zero-crossings of dyadic wavelet transform. A reconstruction algorithm by cubic spline function interpolation, which is used to recover a signal from its dyadic wavelet transform extrema is proposed in this paper. Numerous experiments demonstrate its satisfying properties. Compared with previous algorithms it is simpler, more straightforward and faster.

Key words: signal reconstruction; dyadic wavelet transform; extrema representation; spline function interpolation

1 引言

信号的奇异点通常包含着信号的重要信息,从信号的这些奇异点重构原始信号在许多领域例如,数据压缩、去噪等方面发挥着重大的作用.作为一个强有力的工具,小波变换在信号处理领域已经有了大约十多年的应用,本文提出的重构算法也是基于小波变换的.

1.1 二进小波变换与多尺度边缘提取

信号的多尺度边缘提取是通过在各个尺度上平滑该信号并由平滑后信号的一阶或二阶微商值检测信号的突变点而获得的.信号的一阶微商极值点对应于信号的二阶微商的零值点(或称零交叉点),即信号的拐点.

函数 $f(t)$ 称为平滑函数,是指当 $f(t)$ 的积分等于 1,并在无穷远处收敛到 0.通常情况下取 $f(t)$ 为高斯函数.设 $f(t)$ 为一平滑函数且二阶可微,并定义它的一阶和二阶微商分别为:

$$a(t) = d(f(t))/dt \quad (1)$$

$$b(t) = d^2(f(t))/dt^2 \quad (2)$$

若 $a(t)$ 在无穷远处也收敛到 0,则 $\int_{-\infty}^{\infty} a(t) dt = 0$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty} b(t) dt = 0$,所以 $a(t)$ 和 $b(t)$ 可以作为小波函数.

对于任意函数 $x(t)$,定义 $x_s(t) = \frac{1}{s} x(\frac{t}{s})$ 为 $x(t)$ 以尺度因子 s 的伸缩.小波变换是通过信号与小波函数的一个伸缩之卷积来实现的.信号 $x(t)$ 在尺度 s 和位置 t 上关于上面两个小波函数 $a(t)$ 和 $b(t)$ 的小波变换分别为:

$$w_s^a x(t) = x * \frac{a}{s}(t) \quad (3)$$

$$w_s^b x(t) = x * \frac{b}{s}(t) \quad (4)$$

可以导出

$$w_s^a x(t) = x * (s \frac{d}{dt}) = s \frac{d}{dt} (x * a_s)(t) \quad (5)$$

$$w_s^b x(t) = x * (s^2 \frac{d^2}{dt^2}) = s^2 \frac{d^2}{dt^2} (x * a_s)(t) \quad (6)$$

即小波变换 $w_s^a x(t)$ 和 $w_s^b x(t)$ 分别是尺度 s 上的已平滑信号的一阶和二阶微商. $w_s^a x(t)$ 的局部极值点对应于 $w_s^b x(t)$ 的零值点和 $x * a_s(t)$ 的拐点.尺度 s 较小时, $a_s(t)$ 对 $x(t)$ 的平滑作用是可以忽略的,因此,边缘检测提供了 $x(t)$ 的大部分突变点位置.尺度 s 较大时,信号 $x(t)$ 与 $a_s(t)$ 的卷积除了小的信号波动,边缘检测得到的是较大结构的突变点.实际问题中,只需取 $s = 2^j$ ($j \in \mathbb{Z}$) 就足够了,这时,称小波变换为二进小波变换.

1.2 基于多尺度边缘的信号重建

已经有几位学者从事由信号的多尺度边缘重建信号工作^[1~6],其中包括 S. Mallat 所作的工作^[2]和刘贵忠等人的工作^[6].在文[2]中 Mallat 提出了交替投影算法来重构信号 $x(t)$ 的二进小波变换 $w_2^j x(t)$.为了重构 $w_2^j x(t)$,Mallat 定义了集合 K , K 是函数序列 $\{g_j(t)\}_j$ z 空间使得下式成立

$$\| \{g_j(t)\}_j \|_z^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[g_j^2 + 2^{2j} \left\| \frac{dg_j}{dt} \right\|^2 \right] < \quad (7)$$

且模 $\| \cdot \|_z$ 定义了 K 上的一个内积结构,使 K 成为一个 Hilbert 空间.在 K 中定义了两个凸集合 V 和 W ,使得 $w_2^j x(t) \in V$,其中,凸集合 V 是 $L^2(R)$ 中的函数的二进小波变换子空间,凸集合 W 是函数序列 $\{g_j(t)\}_j$ z K 的仿射空间,使 $\{g_j(t)\}_j$ 满足插值条件

$$g_j(t_n^j) = w_2^j x(t_n^j) \quad (8)$$

其中, t_n^j 代表 $|w_2^j x(t)|$ 的极大值位置.从给定信号 $x(t)$ 的二进小波变换模极大值序列重构 $w_2^j x(t)$ 的任务就可归结为寻求 W 中的模最小元素.当且仅当 W 中只有一个元素时,重构是唯一的.Mallat 定义了两个投影算子 P_V 和 P_W ,这两个投影算子分别实现到凸集合 V 和 W 的投影运算.令 $P = P_V \circ P_W$,记 $P^{(n)}$ 为 P 的第 n 次迭代,可以证明,对任意函数序列 $X = \{g_j(t)\}_j \in K$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P^{(n)} X = P X \quad (9)$$

当从 0 元素出发进行迭代,则有 $\lim_{j \rightarrow \infty} P^{(n)} \{0\} = P \{0\}$,迭代收敛于 W 中模最小的元素.最后,把重构的二进小波变换逆变换,则得到原始信号.在文[6]中刘贵忠等人给出另一种简单的整形迭代算法,其基本思想是利用高斯函数将只含模极大值而其它点的值全为零的信号平滑整形后,再进行小波逆变换并经多次迭代修整而得到原始信号.

这两种方法虽不失为好的重构算法,但算法过于复杂,都得多次迭代,且收敛速度较慢.本文提出,对于信号的二进小波变换极值(即零交叉序列),用样条插值方法来恢复信号的进二小波变换,从而实现信号的重构.

2 样条函数插值重构算法

设信号 $x(t)$ 在尺度 2^j (以下简称尺度 j) 上的二进小波变换 $w_2^j x(t)$ 的极值及其时刻序列分别为 y_i, t_i ,即 $w_2^j x(t_i) = y_i$,亦即在 t_i 处, $w_2^j x(t)$ 取得局部极值 y_i ,且记 $w_2^j x(t)$ 在 t_i 处的一阶导数为 $m_i, (i = 1, 2, \dots, n)$.

用三次样条插值来重构 $w_2^j x(t)$,设在 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的三次样条函数为 $s(t)$,且 $s(t_i) = y_i, i = 1, 2, \dots, n$,则 $s(t)$ 在子区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上应满足条件:

$$s(t_{i-1}) = y_{i-1}, s(t_i) = y_i, s'(t_{i-1}) = m_{i-1}, s'(t_i) = m_i$$

的三次埃米特插值多项式^[7].由文[7]知 $s(t)$ 在 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的表达式为:

$$s(t) = m_{i-1} \frac{(t_i - t)^2(t - t_{i-1})}{h_i^2} - m_i \frac{(t - t_{i-1})^2(t_i - t)}{h_i^2} + y_{i-1} \frac{(t_i - t)^2[2(t - t_{i-1}) + h_i]}{h_i^3} + y_i \frac{(t - t_{i-1})^2[2(t_i - t) + h_i]}{h_i^3} \quad (10)$$

其中, $h_i = t_i - t_{i-1}$.由于 $w_2^j x(t)$ 在 t_i 取得局部极值,所以有 $m_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$,则由式(10)有

$$s(t) = y_{i-1} \frac{(t_i - t)^2[2(t - t_{i-1}) + h_i]}{h_i^3} + y_i \frac{(t - t_{i-1})^2[2(t_i - t) + h_i]}{h_i^3} \quad (t \in [t_{i-1}, t_i], i = 2, 3, \dots, n) \quad (11)$$

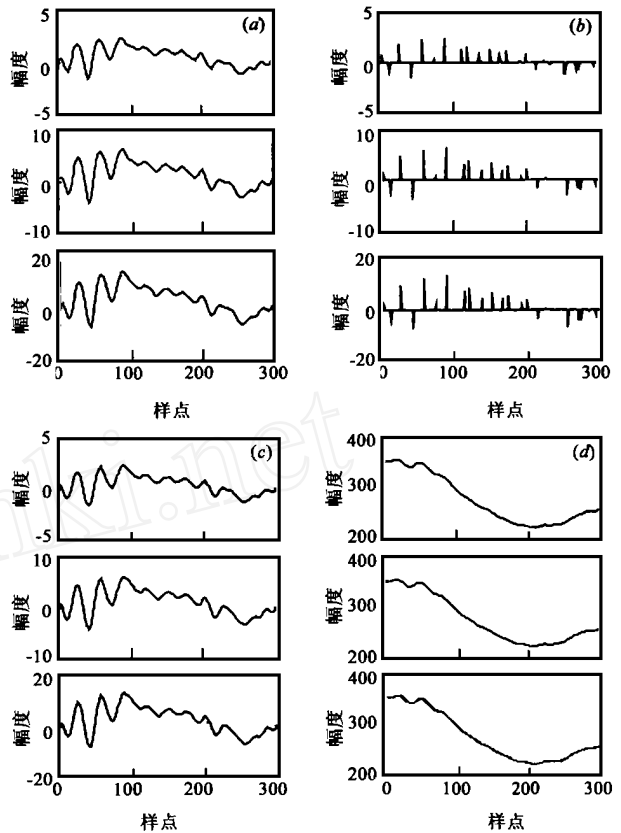


图 1 (a) 将原信号依次小波分解 3 次的 $w_2^j x(t)$ 波形; (b) 依次为 $w_2^j x(t)$ 的极值; (c) 依次为 $w_2^j x(t)$ 的样条插值重构; (d) 依次为原始信号波形、重构信号波形以及原始信号与重构信号的比较

用 $s(t)$ 近似代替 $w_2^j x(t)$,则得到 $w_2^j x(t)$ 的重构.如图 1 所示.

由于小波变换过程存在着一定的光滑作用,所以多数 $w_2^j x(t)$ 都具有一定的光滑性,这说明用样条插值拟合 $w_2^j x(t)$ 是可行的,而且,因为在结点处, $w_2^j x(t)$ 取得极值,所以用三次样条插值算法更加简单,更易实现.下面的实验也说明了这一点.

3 数值计算实验

为了验证本文提出的样条插值算法的有效性,我们做了如下不同类型的信号实验.本文中用的小波函数为文[2]中构造的二次样条函数小波.此外,为了定量的讨论重构质量,定义一个重构信噪比 SNR 如下:

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{i=0}^{N-1} |x(i)|^2}{\sum_{i=0}^{N-1} |x(i) - \hat{x}(i)|^2} \right) \quad (12)$$

其中, x 代表原始信号, \hat{x} 代表重构信号.

在如下仿真实验中,小波分解级数均为 5 级,在 Mallat 交替投影重构方法中,均迭代 40 次.

为了说明在信号的跳跃间断点处的重构效果,图 2 所示的信号在 150 和 360 附近包含不连续点,为此将其分成 5 个区间,其重构的 SNR 如表 1 所示.

由表 1 结果可以看出在信号的不连续点区域的重构质量不理想,而在连续区域的重构效果较好.

表 1

方法 \ 区间	Mallat	本文
[1, 100]	19.0028	33.4718
[101, 200]	20.2844	19.4600
[201, 300]	29.8587	21.6559
[301, 400]	10.4218	14.9264
[401, 512]	19.8683	29.7113

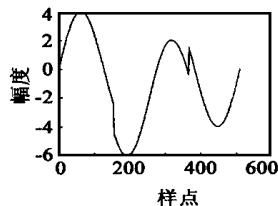


图 2 Heavy sine 1 信号

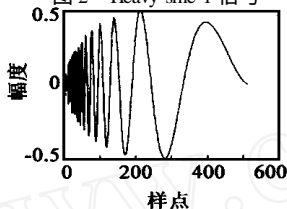


图 3 Doppler 信号

图 3 所示的为 Doppler 信号,为了说明不同频率信号的重构质量,将 Doppler 信号依频率递减分成 4 个区间,其重构的 SNR 如表 2 所示.

由表 2 结果可以看出对信号的高频部分,由于其一个周期内的采样点相对较少,包含的信息量少,所以,重构质量不如低频部分.

为了说明本文算法的计算效率和重构质量,表 3 给出了在 Pentium -700 机上,Matlab5.1 环境下, Mallat 算法和本文方法关于各种信号的重构时间和 SNR.

由表 3 结果可以看出,本文方法重构质量较好,平均计算效率提高了 42 倍.

表 3

方法 \ 区间	Mallat		本文	
	SNR (dB)	Time (s)	SNR (dB)	Time (s)
正弦	27.3916	18.5860	37.1505	0.4600
Heavy sine 1	19.5021	19.4780	21.7074	0.4810
Heavy sine 2	32.0666	101.2160	41.1970	1.9530
Vonkoch	19.3411	22.6720	26.0317	0.5110
Blocks	8.6769	19.3980	13.6264	0.4910
Doppler	7.1549	20.1490	15.1891	0.4910

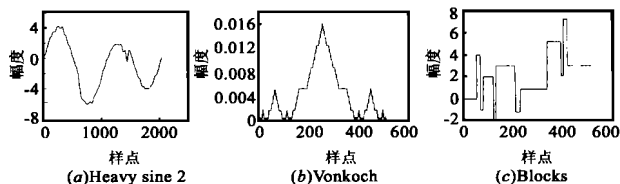


图 4 取自 Matlab5.1 的各种信号

4 结论

本文提出了一个新的由信号二进小波变换极值点重构原始信号的样条插值重构算法. 算法主要利用三次样条函数插值重构二进小波变换,由于小波变换的光滑作用,使得多数二进小波变换具有一定的连续性,从而使样条插值重构成为可能. 数值实验表明,重构效果是好的,与交替投影迭代算法^[2]相比,本文算法在原理上更简单,计算效率更高,程序实现更方便. 对包含幅度较大的跳跃间断点的信号,在对重构效果要求不太高时,用本算法可以实现快速重构;对具有连续性的信号,用本算法可以实现具有很高信噪比的快速重构.

参考文献:

- [1] S. Mallat, Zero-crossings of a wavelet transform [J]. IEEE Trans. On Information Theory Jul. 1991, 37(4): 1019 - 1033.
- [2] S. Mallat, S. Zhong, Characterization of signal from multiscale edges [J]. IEEE Trans. On Pattern Analysis and Machine Intelligence, Jul. 1992, 14(7): 710 - 732.
- [3] Z. Berman, J. Baras, Properties of the multiscale maxima and zero-crossing representations [J]. IEEE Trans. SP, 1993, 41(12): 3216 - 3231.
- [4] A. Cetin, R. Ansari, Signal recovery from wavelet transform maxima [J]. IEEE Trans. SP Jan. 1994, 42(1): 194 - 196.
- [5] Z. Cvetkovic, M. Vetterli, Discrete-time wavelet extrema representation: design and consistent reconstruction [J]. IEEE Trans. SP, Mar. 1995, 43(3): 681 - 693.
- [6] 刘贵忠, 张志明, 冯牧等. 信号重构的小波极大模整形迭代算法 [J]. 自然科学进展, Jul. 2000, 10(7): 600 - 604.
- [7] 高益明, 裴锡灿, 李才等. 计算方法教程 [M]. 长春: 东北师范大学出版社, 1991.

作者简介:



刘贵忠 (见本期第 67 页)

马社祥 1962 年出生, 博士生, 主要研究方向为视频压缩, 图像处理和多媒体通信等.